

考虑剪应力作用的挡土墙主动土压力计算

陈林¹, 张永兴¹, 冉可新²

(1.重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045; 2.澳大利亚阿德莱德大学 土木工程学院, 阿德莱德 5000)

摘要: 将墙后土体主应力偏转考虑为土体的土拱效应, 根据土拱形状计算平均竖直应力, 由此得到了对应不同内摩擦角和墙土摩擦角的侧土压力系数。将其用于水平微分单元法, 并满足力和力矩平衡条件求解挡土墙主动土压力, 得到了挡土墙主动土压力强度、土压力合力和合力作用点的理论公式, 并与库仑土压力理论和模型试验数据进行了比较分析。结果表明, 挡土墙主动土压力强度为非线性分布, 与模型试验结果基本吻合。

关键词: 土拱; 土压力; 剪应力; 静力平衡

中图分类号: TU 473

文献标识码: A

A method for calculating active earth pressure considering shear stress

CHEN Lin¹, ZHANG Yong-xing¹, RAN Ke-xin²

(1.College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China;

2.Department of Civil Engineering, Adelaide University, Adelaide 5000, Australia)

Abstract: In order to eliminate the calculation inaccuracy, considering the effect of the angle of internal friction on the inclination of the sliding plane of soils behind retaining wall, considering the deflected principal stress as soil arching effect, the horizontally earth pressure factor is calculated for different friction angles of soil and friction angle between wall-surface and soil based on the analysis about minor principal stress of soil arching elements to study the vertical stress. The theoretical formulae of the active earth pressures, the resultant earth pressures and the points of application of resultant earth pressures were obtained based on the method which satisfies the equilibrium condition. The formula presented is compared with some experimental observations. The results agree well with those of the experimental observations.

Key words: soil arching; active earth pressure; shear stress; static equilibrium

1 前言

挡土墙上的土压力是土木工程中古老的课题, 20世纪以来得到了较大的发展, 文献[1]总结了挡土墙土压力理论发展历程。土拱效应是岩土工程中一种常见的现象, 比如墙体绕墙顶转动过程中, 由于土拱效应使得土压力呈显著的非线性分布。当墙后土体处于极限平衡状态时, 可以认为各土层相对于其相邻土层产生相对运动趋势, 土体内的主应力发生旋转, 导致水平方向产生剪应力, 形成显著的土拱效应, 从而导致主动土压力呈显著非线性分布^[2]。Handy^[2]、Paik^[3]根据土拱效应原理, 按朗肯滑裂面对平均土侧压力系数进行计算, 依据水平土

层单元的静力平衡条件建立了土压力强度的计算方法, 但其未能考虑墙后土体的力矩平衡。蒋波^[4]根据基于土拱效应原理, 按库仑滑裂面建立了土侧压力系数及土压力强度的计算方法; 依据水平土层单元的静力平衡条件, 建立了土压力强度的计算方法, 但未能考虑墙后土体的力矩平衡条件。王元战^[5]通过对库仑滑裂面上水平土层单元的静力平衡条件进行分析, 假设水平土层的竖向应力呈均匀分布, 建立了墙后土压力的计算方法, 但他欠缺考虑墙后土体的土拱效应。由此可见, 目前平移模式下挡土墙土压力理论和计算方法普遍存在欠缺对墙后滑裂土体的实际应力状态的充分分析, 只考虑墙后滑裂土体的静力平衡或应力状态的某一方面, 忽略

墙后土体的静力平衡与主应力偏转、水平土层间剪应力的相关性。因此,如何将挡土墙墙后土体的应力状态和静力平衡统一起来进行分析仍有待深入。本文假设小主应力拱形状为抛物线,墙后土体的滑裂面为平面,沿水平向主应力发生偏转,主应力大小不变,偏转角由墙面处的最大值逐渐减小到滑裂面处为0,小主应力轨迹从墙面到滑裂面形成半个土拱,滑裂面为小主应力拱的拱顶面。根据土拱形状计算平均竖直应力,由此得到了对应不同内摩擦角和墙土摩擦角的侧土压力系数,将其用于微分单元法并满足力和力矩平衡条件求解平动模式下的挡土墙主动土压力,得到了挡土墙主动土压力强度、土压力合力和合力作用点的理论公式,并与模型试验数据及其他土压力理论进行比较分析。

2 应力分析

为了分析土拱效应,首先考察图1所示的土体模型。假定两平行竖直的挡墙水平距离为 L ,上体为均质的无黏性土。随着地面的沉降,墙土间的摩擦力逐步发挥,作用在墙背上的水平向应力已不是小主应力, A 、 C 两点的主应力方向已发生偏转^[5]。如图1所示,设墙间土体均达到极限平衡状态,则 A 、 C 两点的小主应力轨迹将形成一条拱曲线,即为小主应力拱,图中虚线即为小主应力拱轨迹。

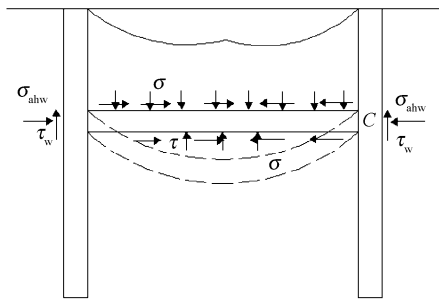


图1 平行墙间的小主应力拱^[3]

Fig.1 Stress redistribution caused by arching^[3]

同理,如果刚性挡土墙沿水平方向移动,由于挡土墙上摩擦力的存在,土体单元的大小主应力方向将会发生变化,如图2所示。

应力拱在挡土墙上 A 点的切线与垂直方向的夹角 θ 可由下式计算得到^[3]:

$$\theta = \tan^{-1} \left\{ \left[(N-1) + \sqrt{(N-1)^2 - 4N \tan^2 \delta} \right] / 2 \tan \delta \right\} \quad (1)$$

式中: N 为大小主应力比,由土力学强度理论可知, $N = \tan^2(45^\circ + \varphi/2)$; φ 为挡土墙后土体的内摩擦角; δ 为墙土摩擦角。

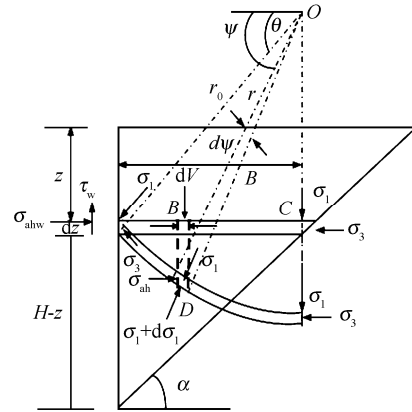


图2 刚性挡土墙间的小主应力拱^[6]

Fig.2 Trajectory of minor principal stresses behind wall^[6]

3 平面滑裂面与抛物线形应力拱

3.1 挡土墙后土体滑裂面倾角的确定

假定挡土墙墙背直立,墙后填土水平, δ 为墙土摩擦角, φ 为墙后土体内摩擦角,挡墙后土体处于主动极限平衡状态时,库仑土压力理论假定土体内出现三角形滑动楔体,其滑裂面倾角 α 为^[5]

$$\alpha = \arctan \left(\sqrt{\tan^2 \varphi + \frac{\tan \varphi}{\tan(\varphi + \delta)}} + \tan \varphi \right) \quad (2)$$

3.2 挡土墙侧土压力系数

图2为平面滑裂面挡土墙后水平微分单元法分析模型,由抛物线形拱的几何形状^[3]可知,

$$r = 2\beta / (1 - \cos \psi) \quad (3)$$

式中: β 为抛物线形拱的形状参数。

由图2中可知,深度 z 处的土体单元的宽度为

$$B_z = r_0 \cos \theta \quad (4)$$

式中: r_0 为 A 点的最小主应力拱半径; θ 为应力拱在 A 点的切线与垂直方向的夹角。

水平微分单元土体受力如图3所示,由图中土体单元垂直方向平衡条件可知,微分单元部分在垂直方向受 σ_v ,墙土摩擦力 τ_w 作用,微分单元部分垂直作用力 dV 为

$$dV = \sigma_v dA = \sigma_1 (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi / N) (r d\psi \sin \psi) \quad (5)$$

式中: dA 为土体单元宽度。

深度 z 处土体单元平均垂直应力 $\bar{\sigma}_v$ 为

$$\bar{\sigma}_v = V / B_z = \int_0^{\pi/2} dV / B_z \quad (6)$$

式中: V 为水平微分单元体所受垂直方向总的作用力; $B_z = r_0 \cos \theta$ 。

将式(5)代入式(6),并积分可得

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 + 0.5 \cos \theta - 1/N(1 + 0.5 \cos \theta + \ln(1 - \cos \theta)) \\ \bar{\sigma}_v &= A \sigma_1 (1 - \cos \theta) / \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

则主动土压力系数 K_{awn} 可由式 (7) 计算为

$$K_{awn} = \frac{\bar{\sigma}_v}{\sigma_{ahw}} = \frac{[\cos^2 \theta + 1/N \sin^2 \theta] \cos \theta}{A(1 - \cos \theta)} \quad (8)$$

式中： σ_{ahw} 为挡土墙背的正应力， $\sigma_{ahw} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta$ 。

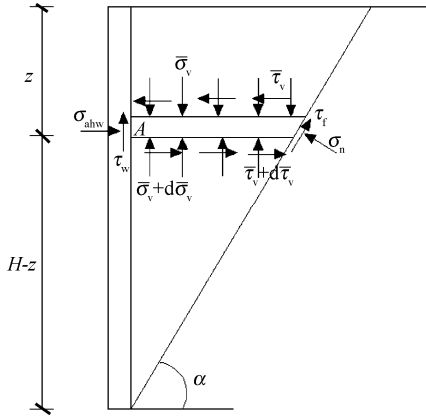


图3 平面滑裂面水平微分单元土体受力图

Fig.3 Free body diagram of differential flat element

3.3 挡土墙主动土压力

3.3.1 基本方程的建立

如图3所示，在距楔体表面距离为 z 处取厚度为 dz 的水平微分单元， $\bar{\sigma}_v$ 为作用于微分单元顶面的平均竖向应力， $\bar{\sigma}_v + d\bar{\sigma}_v$ 为作用于单元底面平均竖向应力； σ_{ahw} 为挡土墙背的正应力， $\sigma_{ahw} = \bar{\sigma}_v K_{awn}$ ； $\bar{\tau}_v$ 为作用于单元底面平均剪应力； dW 为水平微分单元重力； γ 为土的重度； τ_w 为挡土墙背与填土摩擦力， $\tau_w = \sigma_{ahw} \tan \delta = \bar{\sigma}_v K_{awn} \tan \delta$ 。

由土体单元垂直方向平衡条件，可得

$$d\bar{\sigma}_v B_z + \tau_w dz + \bar{\sigma}_v dB_z + (\tau_f + \sigma_n \cot \alpha) dz = \gamma B_z dz \quad (9)$$

式中： τ_f 为滑裂面处剪应力， $\tau_f = \sigma_n \tan \varphi$ ； σ_n 为滑裂面处正应力； K_{awn} 为主动土压力系数； B_z 为土条宽度， $B_z = (H - z) / \tan \alpha$ ； α 为滑裂面倾角。

水平方向平衡条件为

$$d\bar{\tau}_v B_z + \bar{\tau}_v dB_z + \sigma_{ahw} dz + (\tau_f \cot \alpha - \sigma_n) dz = 0 \quad (10)$$

由力矩平衡条件可得

$$\bar{\tau}_v = K_{awn} \bar{\sigma}_v \tan \delta - \frac{\gamma(H - z)}{2 \tan \alpha} + \frac{(H - z) d\bar{\sigma}_v}{2 \tan \alpha} - \frac{\bar{\sigma}_v}{\tan \alpha} \quad (11)$$

当 $z=0$ 时， $\bar{\tau}_v=0$ 。由式 (11) 可知，当 $z=0$ 时，

$$\frac{d\bar{\sigma}_v}{dz} = \gamma。$$

将式 (11)、(10) 代入式 (9)，消去 σ_n 整理得

$$\frac{d^2 \bar{\sigma}_v}{dz^2} - \frac{A}{H - z} \frac{d\bar{\sigma}_v}{dz} + \frac{B}{(H - z)^2} \bar{\sigma}_v + \frac{C}{H - z} = 0 \quad (12)$$

式中：

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 - \frac{2K_{awn} \tan \delta}{\tan \theta} - \frac{2}{\tan \theta \tan(\varphi + \theta)}; \\ C &= \gamma \left[1 - \frac{2}{\tan(\theta + \varphi) \tan \theta} \right]; B = \frac{2K_{awn}}{\tan \theta} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式 (12) 即为求解挡土墙主动土压力分布的基本方程，此为欧拉方程。

令 $x = H - z$ ，则式 (12) 转化为欧拉方程为

$$x^2 \frac{d^2 \bar{\sigma}_v}{dx^2} + Ax \frac{d\bar{\sigma}_v}{dx} + B\bar{\sigma}_v + Cx = 0 \quad (14)$$

此欧拉方程特征方程为

$$r^2 + (A - 1)r + B = 0 \quad (15)$$

判断条件为

$$(A - 1)^2 - 4B = \frac{4K_{awn}^2 \tan^2 \delta}{\tan^2 \theta} + \frac{4}{\tan^2 \theta \tan^2(\theta + \varphi)} - \frac{8K_{awn}}{\tan^2 \theta} \quad (16)$$

由微分方程特征方程求解条件，当式 (16) 等于 0 时，方程有 1 个实根，此时

$$K_{awn1} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \delta}{\tan^2(\theta + \varphi)}} \quad (17)$$

由式 (8) 可知， $0 < K_{awn} < 1$ ，所以

$$K_{awn1} = 1 - \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \delta}{\tan^2(\theta + \varphi)}} \quad (18)$$

当 $K_{awn} < K_{awn1}$ 时，微分方程有 2 个实根；当 $K_{awn1} < K_{awn} < 1$ 时，微分方程有 2 个虚根。

由挡土墙实际情况可知， $\theta + \varphi \approx \pi/2$ ，所以 $K_{awn1} \approx 0$ ，则 $K_{awn1} < K_{awn} < 1$ ，实际情况下的挡土墙主动土压力分布的微分方程有 2 个虚根。

方程 (12) 满足边界条件 $z=0$ 时， $\bar{\sigma}_v=0$ ；

$z=H$ 时， $\bar{\sigma}_v=0$ ，求解得

$$\bar{\sigma}_v = (H - z)^e \left[A_1 \cos(\beta \ln |H - z|) - B_1 \sin(\beta \ln |H - z|) \right] - \frac{C(H - z)}{A + B} \quad (19)$$

式中： H 为墙高度。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{K_{awn} \tan \delta}{\tan \theta} + \frac{1}{\tan \theta \tan(\varphi + \theta)} \\ A_1 &= \frac{\gamma + (1 - \varepsilon + \beta \tan(\beta \ln H))C / (A + B)}{H^e \beta \cos(\beta \ln H)} \\ B_1 &= \frac{\gamma + (1 - \varepsilon - \beta \tan(\beta \ln H))C / (A + B)}{H^e \beta \sin(\beta \ln H)} \\ \beta &= \sqrt{\frac{K_{awn}}{\tan^2 \theta} - \frac{K_{awn}^2 \tan^2 \delta}{\tan^2 \theta} - \frac{1}{\tan^2 \theta \tan^2(\theta + \varphi)}} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

由 $\sigma_{ahw} = K_{awn} \bar{\sigma}_v$ 得作用在挡土墙上的正应力为

$$\sigma_{ahw} = K_{awn} \bar{\sigma}_v = K_{awn} (H - z)^\varepsilon \left[A_1 \cos(\beta \ln |H - z|) - B_1 \sin(\beta \ln |H - z|) \right] - \frac{K_{awn} C (H - z)}{A + B} \quad (21)$$

3.3.2 土压力的合力及作用点

水平土压力合力为

$$P_{ah} = \int_0^H \sigma_{ahw} dz = H^{\alpha+1} K_{awn} \left[A_2 \cos(\beta \ln H) + B_2 \sin(\beta \ln H) \right] - C_2 H^2 \quad (22)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \frac{A_1(\varepsilon+1) + B_1\beta}{(\varepsilon+1)^2 + \beta^2}; \quad B_2 = \frac{A_1\beta - B_1(\varepsilon+1)}{(\varepsilon+1)^2 + \beta^2} \\ C_2 &= \frac{1}{2} \frac{C}{A+B} K_{awn} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

土压力合力为

$$P = \frac{P_{ah}}{\cos \delta} = \frac{1}{\cos \delta} H^{\alpha+1} K_{awn} \left[A_2 \cos(\beta \ln H) + B_2 \sin(\beta \ln H) \right] - \frac{C_2}{\cos \delta} H^2 \quad (24)$$

土压力对墙底的力矩为

$$M = \int_0^H (H - z) \sigma_{ahw} dz = H^{\alpha+2} K_{awn} \left[A_3 \cos(\beta \ln H) + B_3 \sin(\beta \ln H) \right] - C_3 H^3 \quad (25)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= \frac{A_1(\varepsilon+2) + B_1\beta}{(\varepsilon+2)^2 + \beta^2}; \quad B_3 = \frac{A_1\beta - B_1(\varepsilon+2)}{(\varepsilon+2)^2 + \beta^2} \\ C_3 &= \frac{1}{3} \frac{C}{A+B} K_{awn} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

合力作用点距墙底高度为

$$h = \frac{M}{P_{ah}} = \frac{H^\alpha [A_3 \cos(\beta \ln H) + B_3 \sin(\beta \ln H)] - CH/3(A+B)}{H^{\alpha-1} [A_2 \cos(\beta \ln H) + B_2 \sin(\beta \ln H)] - C/2(A+B)} \quad (27)$$

4 讨 论

查嘎列尔^[7]在格鲁吉亚列宁工学院的实验室内进行的挡土墙土压力试验, 墙背填土为海砂, 天然重度 $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$, 内摩擦角 $\varphi = 37^\circ$, 土与墙间摩擦角 $\delta = 37^\circ$, 挡土墙高度 $H = 4 \text{ m}$ 。为便于对比, 将本文计算方法与上述实验实测值和库仑理论方法、Paik法^[3]、王元战^[6]计算值一起列出, 结果如图 4 所示。此 3 种方法分别表示不同的计算缺陷: 库

仑理论不考虑土拱效应和水平土层间剪应力, Paik 法不考虑水平土层间剪应力, 王元战法不考虑土拱效应, 此 3 种方法都不考虑土体的力矩平衡。

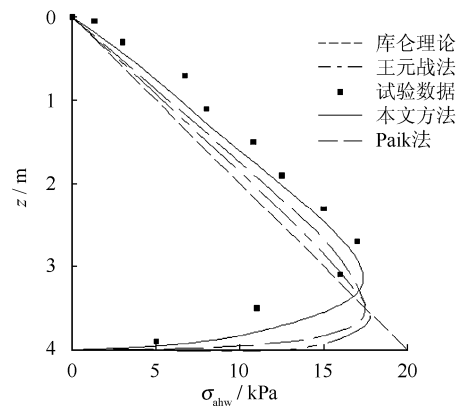


图4 本文方法土压力与试验数据及其他土压力理论的比较
Fig.4 Comparison of active earth pressure of proposed theory with experimental results

从计算结果和试验结果进行对比分析可知, 本文得到的土压力大小与试验结果基本吻合, 挡土墙主动土压力的分布图为曲线形而非直线形。由图可知, 与 Paik 法和王元战法相比, 本文方法得到的土压力分布形式与数值大小, 均与实测结果吻合较好, 并且, 本文得到的土压力强度略大于 Paik 法而明显大于王元战法, 这主要是由于本文计算方法充分考虑墙后土体的实际应力状态, 考虑土层剪应力作用, 并且满足土体力矩的平衡条件。但挡土墙体平移时土层间的剪应力较小, 采用 Paik 法计算时忽略土层间剪应力不会产生很大误差, 而挡土墙体平移时土体的主应力偏转非常明显, 采用王元战法计算时不考虑土拱效应就会产生较大的偏差。并且, 由于在墙体上、中部受到初始静止土压力的影响, 致使土压力计算值与试验结果产生偏差。

5 结 论

本文考虑墙土摩擦角对墙后土体的应力状态、土中剪应力和主应力偏转影响, 假设小主应力拱形状为抛物线, 墙后土体的滑裂面为平面, 沿水平向主应力发生偏转, 主应力大小不变, 偏转角由墙面处的最大值逐渐减小到滑裂面处为 0, 小主应力轨迹从墙面到滑裂面形成半个土拱, 滑裂面为小主应力拱的拱顶面。根据土拱形状计算平均竖直应力, 由此得到了对应不同内摩擦角和墙土摩擦角的侧土压力系数, 将其用于微分单元法并满足力和力矩平衡条件求解平动模式下的挡土墙主动土压力, 得到了挡土墙主动土压力强度、土压力合力和合力作用

点的理论公式, 并与模型试验数据、库仑解及Paik法等比较分析。计算结果表明, 挡土墙墙后土体发生主应力偏转, 其水平土层存有剪应力作用, 这在以往的水平土层分析法是未能考虑的, 本文建立计算方法可以较好地解决这一问题; 挡土墙土压力呈非线性分布, 与模型试验结果基本一致。

参 考 文 献

- [1] 黄求顺, 张四平, 胡岱文. 边坡工程[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2003.
- [2] HANDY R L. The arch in soil arching[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, ASCE, 1985, 111(3): 302—318.
- [3] PAIK K H, SALGADO R. Estimation of active earth pressure against rigid retaining walls considering arching effect[J]. **Geotechnique**, 2003, 53(7): 643—653.
- [4] 蒋波, 应宏伟, 谢康和. 挡土墙后土体拱效应分析[J]. 浙江大学学报, 2005, 39(1): 131—136.
- [5] 王元战, 李新国, 陈楠楠. 挡土墙主动土压力分布与侧压力系数[J]. 岩土力学, 2005, 26(7): 1019—1022.
- [6] SHUBHRA Goel, PATRA N R. Effect of arching on active earth pressure for rigid retaining walls considering translation mode[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2008, (2): 123—133.
- [7] 可列因. 散粒体结构力学[M]. 陈万佳, 译. 北京: 人民交通出版社, 1983.